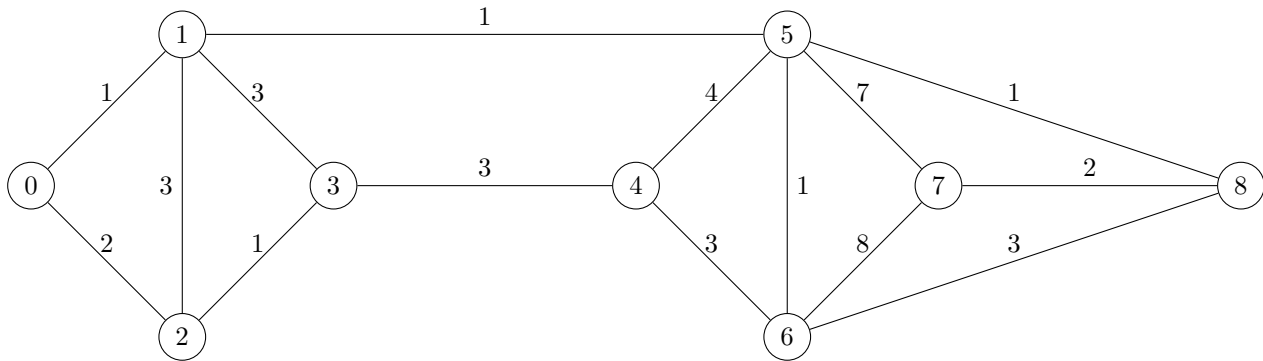


TD : Graphes pondérés et arbres couvrants

Exercice 1. Dérouler les algorithmes de Kruskal et de Prim sur le graphe suivant.



Exercice 2. *Deuxième plus petit arbre couvrant.* On se donne $G = (V, E, \omega)$ un graphe non orienté, connexe, avec $\omega(E) \subset \mathbb{R}_+$. Dans tout l'exercice, on suppose ω injective.

1. Montrer qu'alors l'arbre couvrant minimal est unique.
2. Montrer par un exemple qu'en revanche, il n'y a pas nécessairement unicité du deuxième plus petit arbre couvrant par ordre de poids.

À partir de maintenant, on suppose que G possède au moins $|V|$ arêtes.

3. On se donne T_1 l'unique arbre couvrant minimal et T_2 un deuxième plus petit arbre couvrant. Montrer l'existence de deux arêtes $e_1 \in T_1$ et $e_2 \in T_2$ telles que $T_2 = T_1 \cup \{e_2\} \setminus \{e_1\}$.
4. On se donne T un arbre couvrant quelconque, donné par listes d'adjacence. Donner un algorithme en $O(n^2)$ (avec $n = |V|$) permettant de calculer toutes les valeurs $(\max_T(u, v))_{(u,v) \in V^2}$, où $\max_T(u, v)$ est le poids d'une arête de poids maximal sur un chemin simple (sans sommet en double) de u à v dans T (cette valeur n'est pas définie pour $u = v$).
5. En déduire un algorithme permettant de calculer un deuxième plus petit arbre couvrant, et donner sa complexité.

Exercice 3. Soit $G = (V, E, \omega)$ un graphe orienté sans circuit. Décrire un algorithme pour calculer tous les $(\delta(s, t))_{(s,t) \in V^2}$ en $O(n(a + n))$, avec $n = |V|$ et $a = |E|$, avec G stocké par listes d'adjacence.